

# DM de mathématiques n°8

## Tirages en cascade – Corrigé

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 1. On dispose de  $n$  urnes notées  $U_1, \dots, U_n$  et on suppose que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'urne  $U_i$  contient  $i$  boules numérotées de 1 à  $i$ . On s'intéresse au jeu suivant.

- Au premier tirage, on tire *avec remise* une boule dans l'urne  $U_n$ . Si la boule porte le numéro  $r$ , alors le tirage suivant s'effectue dans l'urne  $U_r$ .
- Plus généralement, pour tout entier  $k$  non nul, au  $k$ -ième tirage on tire *avec remise* une boule d'une certaine urne, et si la boule tirée a le numéro  $s$ , on effectue le  $(k+1)^e$  tirage dans l'urne  $U_s$ .

Pour tout entier naturel  $k$ , on note  $Z_k$  la variable aléatoire égale au numéro de la boule piochée au  $k^e$  tirage. **On convient que  $Z_0 = n$ .**

/2 1) Déterminer la loi de  $Z_1$  et calculer  $\mathbb{E}(Z_1)$ .

$Z_1$  est à valeurs dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . De plus, comme il y a exactement une boule de chaque numéro dans l'urne  $U_n$  (et que tous les tirages sont équiprobables), on a

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \mathbb{P}(Z_1 = k) = \frac{1}{n}$$

Ainsi,  $Z \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ . Ensuite :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_1) &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(Z = k) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \boxed{\frac{n+1}{2}} \end{aligned}$$

2) En déduire que, pour tout  $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\mathbb{P}(Z_2 = r) = \frac{1}{n} \sum_{i=r}^n \frac{1}{i}$$

/4

Par la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(Z_2 = r) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(Z_2 = r \mid Z_1 = i) \mathbb{P}(Z_1 = i)$$

Or, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , si  $\{Z_1 = i\}$  est réalisé, le deuxième tirage s'effectue dans l'urne  $U_i$ , qui ne contient que des boules de 1 à  $i$ .

Ainsi :

$$\mathbb{P}(Z_2 = r \mid Z_1 = i) = \begin{cases} \frac{1}{i} & \text{si } r \leq i \\ 0 & \text{si } r > i \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_2 = r) &= \sum_{i=r}^n \frac{1}{i} \times \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{r-1} 0 \\ &= \boxed{\frac{1}{n} \sum_{i=r}^n \frac{1}{i}} \end{aligned}$$

/2 3) Vérifier par le calcul que  $\sum_{r=1}^n \mathbb{P}(Z_2 = r) = 1$ .

Par ce qui précède,

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \mathbb{P}(Z_2 = r) &= \sum_{r=1}^n \frac{1}{n} \sum_{i=r}^n \frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \sum_{i=r}^n \frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^i \frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \times i \\ &= \frac{1}{n} \times n \end{aligned}$$

Donc on a bien  $\sum_{r=1}^n \mathbb{P}(Z_2) = \boxed{1}$ .

4) Calculer l'espérance de  $Z_2$  grâce à une interversion de sommes.

Par la q. 2),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_2) &= \sum_{r=1}^n r \mathbb{P}(Z_2 = r) \\ &= \sum_{r=1}^n \frac{r}{n} \sum_{i=r}^n \frac{1}{i} \\ &= \sum_{r=1}^n \sum_{i=r}^n \frac{r}{ni} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^i \frac{r}{ni} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_2) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{ni} \times \frac{i(i+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (i+1) \\ &= \frac{1}{2n} \left( \frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\ &= \frac{n+1}{4} + \frac{1}{2} \\ &= \boxed{\frac{n+3}{4}} \end{aligned}$$

5) a) Par la formule des probabilités composées, calculer, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{P}(Z_1 = n, \dots, Z_k = n)$ .

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Z_1 = n, \dots, Z_k = n) \\ &= \mathbb{P}(Z_k = n \mid Z_1 = \dots = Z_{k-1} = n) \\ &\quad \times \dots \times \mathbb{P}(Z_2 = n \mid Z_1 = 1) \mathbb{P}(Z_1 = 1) \end{aligned}$$

Or, chacune de ces probabilités vaut  $\frac{1}{n}$  car on fait tous les tirages dans l'urne  $U_n$ , qui contient  $n$  boules. Ainsi :

$$\mathbb{P}(Z_1 = n, \dots, Z_k = n) = \underbrace{\frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \times \dots \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{n}}_{k \text{ fois}} = \boxed{\frac{1}{n^k}}$$

/3

b) En déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\mathbb{P}(Z_k = i) > 0$ .

L'événement  $\{Z_k = i\}$  contient en particulier l'événement

$$\{Z_k = i, Z_{k-1} = n, \dots, Z_1 = n\}$$

qui lui-même contient l'événement

$$\{Z_{k-1} = n, \dots, Z_1 = n\}$$

Or, comme à la question précédente, on peut montrer que

$$\mathbb{P}(Z_{k-1} = n, \dots, Z_1 = n) = \frac{1}{n^{k-1}}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(Z_k = i) \geq \frac{1}{n^{k-1}} > 0$$

6) À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \mathbb{P}(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=r}^n \frac{\mathbb{P}(Z_k = i)}{i}$$

/3

Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = r) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(Z_{k+1} = r \mid Z_k = i) \mathbb{P}(Z_k = i)$$

Or,

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = r \mid Z_k = i) = \begin{cases} \frac{1}{i} & \text{si } r \leq i \\ 0 & \text{si } r > i \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_{k+1} = r) &= \sum_{i=r}^n \frac{1}{i} \mathbb{P}(Z_k = i) + \sum_{i=1}^{r-1} 0 \\ &= \boxed{\sum_{i=r}^n \frac{\mathbb{P}(Z_k = i)}{i}} \end{aligned}$$

7) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que

$$\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \frac{1 + \mathbb{E}(Z_k)}{2}$$

/3,5

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_{k+1}) &= \sum_{r=1}^n r \mathbb{P}(Z_{k+1} = r) \\ &= \sum_{r=1}^n r \sum_{i=r}^n \frac{\mathbb{P}(Z_k = i)}{i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{P}(Z_k = i)}{i} \sum_{r=1}^i r \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(Z_k = i) \times \frac{i+1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i \mathbb{P}(Z_k = i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(Z_k = i) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}(Z_k) + \frac{1}{2} \times 1 \\ &= \frac{1 + \mathbb{E}(Z_k)}{2} \end{aligned}$$

8) En déduire l'expression de  $\mathbb{E}(Z_k)$ . Quelle est la limite de  $\mathbb{E}(Z_k)$  lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$  ?

/2

On pose  $u_k = \mathbb{E}(Z_k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Par ce qui précède, on a

$$u_{k+1} = \frac{1 + u_k}{2}$$

( $(u_k)$  est donc une suite arithmético-géométrique, et on voit que le "point fixe" est  $\omega = 1$ ). On a donc

$$u_{k+1} - 1 = \frac{1}{2}(u_k - 1)$$

Ainsi, en posant  $v_k = u_k - 1$ , on en déduit que la suite  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est

géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{1}{2^k} v_0 \\ \implies u_k - 1 &= \frac{1}{2^k} (u_0 - 1) \\ \implies \mathbb{E}(Z_k) &= \boxed{1 + \frac{1}{2^k} (n - 1)} \end{aligned}$$

Lorsque  $k$  tend vers  $+\infty$ , on a  $\mathbb{E}(Z_k) = 1$ .

*C'est cohérent car à mesure que le nombre de tirages grandit, il est de plus en plus probable que l'on finisse par tirer dans l'urne  $U_1$ . Or, l'urne  $U_1$  ne contient que la boule 1.*